数理解析研究所講究録
553巻 1985年 108-133

ランク落ちのある正規方程式の諸解法結果の比較法

図書館情報大学　村田 健郎

1　はじめに：$n\times m$ の行列 $A=(a_1,\cdots,a_m)$ に関する正規方程式

$$A^T(Ax-b)=0 \qquad (n\geq m) \qquad (1)$$

の、$\mathrm{rank}(A)=r<m$，あるいは a_j ，$j=1,\cdots,m$ の中に‘殆んど一次従属な’ベクトルがあるとき、通常は列選択つきのハウスホルダ変換による方法が推奨されている。[1] しかし現実には‘実際に A^TA を作って’ガウスの消去法の系統の算法によるという古典的方法が各方面でまだ多用されている。

A^TA ガウスによって一次従属と判定されたベクトルをとり除いた r_g 次元の問題：

$$A_g^TA_g x_g = A_g^T b$$

の解 x_g と、列選択つきハウスホルダによるQR分解からの

$$R_h x_h = Q_h^T b$$

の解 x_h とを、$\|x_g-x_h\|_2$ で見たのでは甚だしい相異を示すことが多い。しかし x_g とて最小二乗解という立場からすればそれなりに眞理を語っている筈だから、両者の　合理的な比較法について考えたい。それがこの報告の主部である。

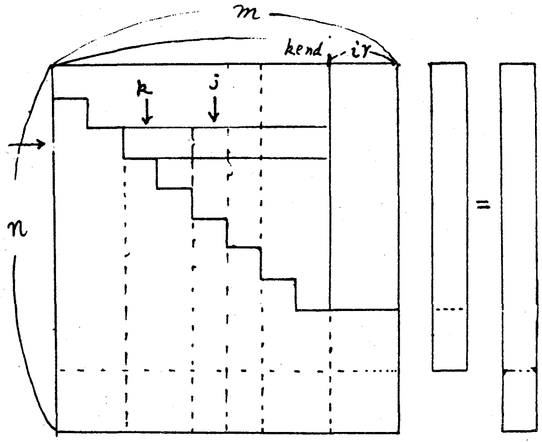
ところで、列選択つきハウスホルダによる方法は、ページスワップの負担が大きいので、単なる上階段化ハウスホルダで、実用的に代用できないかについても調べたい。

2 DHOUSE (基準として使う列選択ハウスホルダ)

```
subroutine DHOUSE ( iter, n, m, eps, a, b , jp, jq, diag, kend, ir)
dimension a(n,m), b(n), jp(m), jq(m), diag(m)

ir = 0
do k = 1, m
    jp(k) = k , jq(i) = k , diag(k) = 0.0
do k = 1, m
    smax = 0.0
    do j = k, m
        s = Σ_{i=k}^{n} a(i,j)**2
        if s > smax then
            smax = s ; jpk = j
    jp(k) = jp ; sigma = sqrt(smax)
    if jpk ≠ k then
        jq(k) ⇄ jq(jpk)
        do i = k, n
            a(i,k) ⇄ a(i,jpk)
    if sigma > eps then
        h = sigma * (sigma + abs(a(k,k)))
        alfa = 1.0/h
        if a(k,k) < 0.0 sigma = -sigma
        a(k,k) = a(k,k) + sigma
        diag(k) = - sigma

        do j = k+1, m
            s = Σ_{i=k}^{n} a(i,k) * a(k,j)
            as = alfa * s
            do i = k, n
                a(i,j) = a(i,j) - as * a(i,k)
        s = Σ_{i=k}^{n} a(i,k) * b(i)
        as = alfa * s
        do i = k, n
            b(i) = b(i) - as * a(i,k)
        a(k,k) = diag(k)      { 臨時. 出力プリントを見易くするため }
    else
        ir = m-k+1 ; go to 1000
1000 kend = m - ir            { kend は rank(A) をあらわす }
do k = kend+1, m              { ここから後退代入 }
    b(k) = 0.0
do k = kend, 1, -1
    do j = k+1, m             { j を m まで, という点が大切 }
        b(k) = b(k) - a(k,j) * b(j)
    b(k) = b(k) / diag(k)
    if jp(k) ≠ k then
        b(k) ⇄ b(jp(k))
return ; end
```



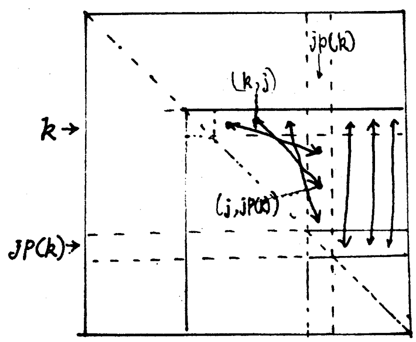
3　ガウス GAUSSO：ここで使うガウスとしては、

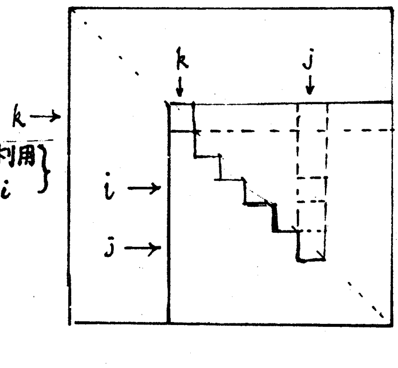
対角上軸選択の対称ガウス

がよい．軸選択なしの対称ガウスは、ランク判定能力，精度どちらも甚だ劣る．

```
SUBROUTINE GAUSSO(iter, m, eps, a, b, JP, JQ, piv, kend, ir)
dimension a(m,m), b(m), JP(m), JQ(m), piv(m),
implicit real*8 (a-h, o-z)
ir = 0
do k = 1, m
    JP(k) = k, JQ(k) = k, piv(k) = a(k,k)
do k = 1, m
    amax = piv(k)
    do i = k+1, m
        if piv(i) > amax then
            JP(k) = i ; amax = piv(i)
    if (amax > eps) then
        if JP(k) ≠ k then
            piv(k) ⇄ piv(JP(k))
            do j = JP(k)+1, m
                a(k,j) ⇄ a(JP(k), j)
            do j = k+1, JP(k)-1
                a(k,j) ⇄ a(j, JP(k))
            b(JP(k)) ⇄ b(k) ; JQ(k) ⇄ JQ(JP(k))
        do j = k+1, m
            t = - a(k,j)/piv(k)
            do i = k+1, j-1
                a(i,j) = a(i,j) + t * a(k,i)
            piv(j) = piv(j) + t * a(k,j)
        t = -b(k)/piv(k)
        do i = k+1, m
            b(i) = b(i) + t * a(k,i)
    else
        ir = m-k+1 ; goto 1000
1000 kend = m-ir
do k = kend+1, m
    b(k) = 0.0
do k = kend, 1, -1
    do j = k+1, m
        b(k) = b(k) - a(k,j) * b(j)
    b(k) = b(k) / piv(k)
    if JP(k) ≠ k then
        b(k) ⇄ b(JP(k))
return ; end
```

{ 対称性利用 $a_{ik} = a_{ki}$ }





4 DHOUSEとGAUSSOについて.

後の議論のため必要となる事項を（周知のことも含めて）列挙しておく．言葉の節約のため$\mathrm{rank}(A)=r=m$とし、また$JP(k)=k$のまゝ仕事が終るよう$a_1,\cdots,a_m$がならべてあるとする。まず$A=QR$，$R=Q^TA$からRの(i,j)要素r_{ij}は、

- $r_{ij}=q_i^Ta_j$　（即ちa_jをq_iに正射影したもの）　(4)

である．またk段実行直前の各a_jのk行以下のベクトルの長さが$\sigma_k=|r_{kk}|$以下，従って直交変換のk段を実行後のこの部分ベクトルの長さも然りということになって、

- $|r_{kj}|$，$j>k$はすべてσ_k以下，また$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots$　(5)

である．次にA^TAを作ってのちA^TAにGAUSSOを行うときも

- $piv(k)>|(A^TA)^{(k)}_{kj}|$，$j>k$　(6)

である．（対称正定値行列$B(=A^TA)$の対角項$b_{ii}=a_i^Ta_i$はすべて正，$b_{ij}=a_i^Ta_j$の絶対値の最大は対角上にある，各k段で$b_{kk}(>0)$を軸とするガウスによる消去後の行列が再び対称正定値であるという周知の事実から容易に証明できる．）

- 次にDHOUSEの列交換$JP(k)$とGAUSSOの$JP(k)$とは理論的は同じになることが示される：$JP(1)$が両者一致することは明らかである．$JP(2)$については、何れの場合も，$a_2,\cdots,a_m$から直交化によってa_1成分をぬきとったベクトル$a_j-\bar{a}_1\rho_j$（但し$\rho_1=\|a_1\|_2$，$\bar{a}_1=a_1/\rho_1$，$\rho_j=\bar{a}_1^Ta_j$）へのa_jの正射影のうち最大なものを第2列とすることに帰することから確める：

（証） DHOUSE については明らか，GAUSSO については、

$$b_{i,j}^{(1)} = b_{i,j} - b_{i,1} b_{1,j} / b_{1,1} = a_i^T a_j - (a_i^T a_1)(a_1^T a_j) / a_1^T a_1$$

と書いてみると、$b_{j,j}^{(1)}$, $j \geqq 2$ のうち最大なものを $b_{2,2}^{(1)}$ にもって来るということは、もとの A について言えば $\forall j \geqq 2$ について

$$a_2^T a_2 - (a_2^T a_1)(a_1^T a_2) / a_1^T a_1 \geqq a_j^T a_j - (a_j^T a_1)(a_1^T a_j) / a_1^T a_1 ,$$

このことは、$\bar{a}_1 := a_1 / \rho_1$, $\rho_j := \bar{a}_1^T a_j$ とおいたとき、

$$a_2^T (a_2 - \bar{a}_1 \rho_2) \geqq a_j^T (a_j - \bar{a}_1 \rho_j)$$

を示している．∎

計算機の丸め誤差の違いによって実際には若干の喰い違いはみられる。（後で示すデータシート参照）

• また理論的には DHOUSE による $diag(k)$ と GAUSSO による $piv(k)$ の間には

$$(diag(k))^2 = piv(k) \tag{7}$$

が成り立つ．（$\because$ $A = QR$, $A^T A = R^T R$, $A^T A = LU$ から当然）

このことから例えば $diag(k) = 10^{-9}$ のとき $piv(k) = 10^{-18}$ となって GAUSSO においてはランク落ちと判定される．

— ガウスがわるいのでなく $A^T A$ を作るのがわるいのだが—

• $A = (a_1, \cdots, a_m)$ の中で $a_{p_1}, \cdots, a_{p_r}$ が一次独立のとき、

$A^T A = (b_1, \cdots, b_m)$, 但し $b_k = (a_1^T a_k, \cdots, a_m^T a_k)^T$

を作ると、$b_{p_1}, \cdots, b_{p_r}$ が一次独立となり，逆も成り立つ．このことから

「$a_1, \cdots, a_k$ が一次独立で a_{k+1} がそれらの一次結合」

$\rightleftarrows$「$b_1, \cdots, b_k$ が一次独立で b_{k+1} がそれらの一次結合」

が示される．

さて、$r=m$ 次元の問題：

$$A^T(Ax-b)=0\ ,\ 即ち\quad Rx=Q^Tb\ の解\ x\in R^m \qquad (7)$$

と、粗い eps2 による $r_2\ (<r)$ 次元の問題：

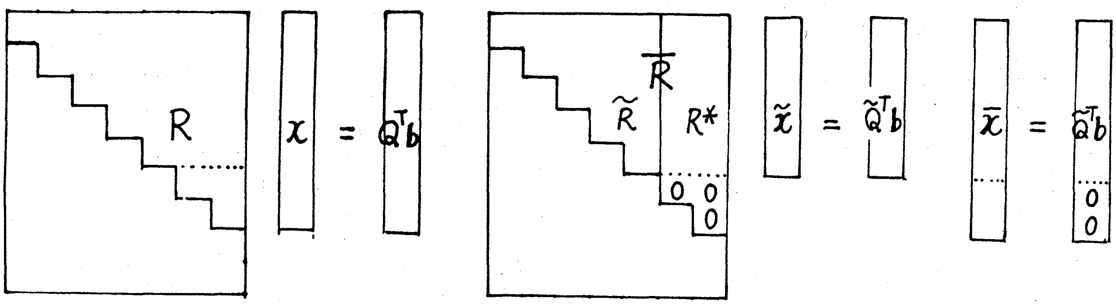
$$\tilde{A}^T(\tilde{A}\tilde{x}-b)=0\ ,\ 即ち\quad \tilde{R}\tilde{x}=\tilde{Q}^Tb\ の解\ \tilde{x}\in R^{r_2} \qquad (8)$$

とを合理的に比較するため、仲介役として中間的な問題：

$$\bar{R}\,\bar{x}=\left(\begin{array}{c}\tilde{Q}^Tb\\ \cdots\\ 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\updownarrow r_2\\ \\ \updownarrow m-r_2\end{array}\ ,\ 但し\ \bar{R}\ については下図参照 \qquad (7.5)$$

を考える。これは m 次元空間の中の階数 $r_2<m$ の問題である。
このとき次のように言うことができる：

$\tilde{x}$ に、ゼロを $m-r_2$ 個追加した m 次元ベクトル $\bar{x}^{(0)}=(\tilde{x},0)^T$ は m 次元の問題 (7.5) の一般解 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{r_2},\bar{x}_{r_2+1},\cdots,\bar{x}_m)^T$ のなかの、$\bar{x}_{r_2+1},\cdots,\bar{x}_m$ をゼロと指定した特解である。



さて A^TA ーガウスによってそのランク r_g を判定し、一次従属と判定されたベクトルをとりのぞいた問題 $A_g^TA_gx_g=A_g^Tb$ を解いたとする。その後，A_g を改めて DHOUSE によって QR 分解して $R_gx_h=Q_g^Tb$ を解く。DHOUSE による(7)の解を x_{h0} とし、

$$\|b-Ax_{h0}\|_2\ ,\ \|b-A_{r_g}x_g\|_2\ ,\ \|b-A_{r_g}x_h\|_2\ ,\ \|x_g-x_h\|_2$$

などを比較すればよい。$\|x_g-x_{h0}\|_2$ を見るのは通常無意味である。（6章のデータ例えば11頁，および20頁項番1）を参照されたい。）

5 テストプログラムの概要．（すべてREAL*8（2倍精度））

テスト行列 $A(N,M)$ と $b(N)$ を作成
（今回は $N=20$, $M=20$ のものについて行なう）

$\|A\|_2$ を概算（今回は A^TA に対するべき乗法3反復にて概算）

$eps = 0.222*10^{-15}*\|A\|_2$; $A1=A$; $b1=b$

call DHOUSE(0, N, M, eps, A1, b1, JP, JQ, DIAG, KEND, IR)
（計算機eps一杯の精度にて問題をとく．解 x_{h0} が b1 に．）

$\|A^{-1}\|_2$ を概算（QR分解結果Rを使い逆反復法にて $\|(R^TR)^{-1}\|_2^{\frac{1}{2}}$ を概算）

$Cond_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$; $\|b - Ax_{h0}\|_2$ を計算（プリント）

$eps = 0.5*DIAG(KEND)$ （問題に合せてepsを設定）

{これからが異なるプログラムによる結果の比較}

do iter = 1, 4 （iterが進むにつれepsを粗くし、多くのランク落ちを起させる）

$A1=A$; $b1=b$

ここに供試プログラムを置く．例えばGAUSSOをテストするときは、$B=A_1^TA_1$, $b2=A_1^Tb_1$ を作って

call GAUSSO(iter, M, eps, B, b2, JP, JQ, PIV, KEND, IR) {*}

得られた解 x_g（b2に立つ）につき $\|b - A_gx_g\|_2$ を計算．

$b3 = b$

{上の結果ランク落ちとされた $a_{p_1}, \cdots, a_{p_{ir}}$ をゼロ化した A_2 を作り、A_2 に対し再びDHOUSEを行なう：}

Call DHOUSE(iter, N, M, eps, A2, b3, JP, JQ, DIAG, KEND, IR)

得られた解 x_h（b3に立つ）につき $\|b - A_g x_h\|_2$ を計算

$\|x_g - x_h\|_2$, $\|x_g - x\|_2$, $\|x_h - x\|_2$ を計算（但し x は真の解）

$eps = eps*100$ {GAUSSOをテストするとき，100を使う}

{*} 後ほど上階段化ハウスホルダHOUSEOをテストするときはここにおく．

テストに供したAとb

A： 二通りの行列についてだけ示す： GAUSSO のテストには、下記の行列の（ ）のないものを使用，OHOUSE（後述）のテストには（ ）つきのものを使用した。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	-1				(10)														
2	-1	2	-1			(-10)														
3		-1	2	-1																
4			-1	2	-1															
5				-1	$1+\varepsilon 1$	$-\varepsilon 1$														
6		(-10)			$-\varepsilon 1$	$1+\varepsilon 1$	-1													
7		(20)	(-10)			-1	2	-1												
8		(-10)	(20)				-1	2	-1											
9			(-10)					-1	2	-1										
10									-1	$1+\varepsilon 2$	$-\varepsilon 2$									
11										$-\varepsilon 2$	$1+\varepsilon 2$	-1				$10(1+\varepsilon_2)$				
12											-1	2	-1			-10				
13												-1	2	-1						
14													-1	2	-1					
15														-1	$1+\varepsilon 3$	$-\varepsilon 3$				
16															$-\varepsilon 3$	$1+\varepsilon 3$	-1			
17																-1	2	-1		
18														(-10)			-1	2	-1	
19														(20)				-1	2	-1
20														(-10)					-1	$1+\varepsilon 4$

b： ICASE = 1, 3, 8 の三通り．それぞれ下記の正解を先に与えて $b := Ax$.

ICASE = 1

1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1

ICASE = 3

0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0

ICASE = 8

0	1	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	1	0	-1	0

IPUTUB（右辺bに与える摂動）：　$\varepsilon = 10^{-6}$とし　（プリンタ出力EPSY）

IPUTUB $=1$ の場合：＋方向ばかりの摂動ゆえ、大きなδxをひきおこす。

0 0 +ε 0 0	0 0 +ε 0 0	0 0 +ε 0 0	0 0 +ε 0 0

IPUTUB $=3$ の場合：＋，－交互の摂動ゆえ、δxは比較的小さい筈．

0 +ε 0 -ε 0	0 +ε 0 -ε 0	0 +ε 0 -ε 0	0 +ε 0 -ε 0

行列Aの特徴

ICASE＝1，3用：　5本一組の列ベクトル毎に$i=1,2,3,4$の順にε_iを与え、DHOUSEによるとき約$0.4\times\varepsilon_i$のオーダのランク落ち判定用epsによってランク落ちが起るよう作ってある．（GAUSSOによるときは約$0.16\times(\varepsilon_i)^2$）

例えば$\varepsilon 1=10^{-4}$，$\varepsilon 2=10^{-3}$，$\varepsilon 3=10^{-2}$，$\varepsilon 4=10^{-1}$のとき、eps＝約0.16×10^{-8}にてGAUSSOではa_1が落ちる．この行列のノルム，条件数は、

$$\|A\|_2 \doteqdot 3.6\ ,\ \|A^{-1}\|_2 \doteqdot 0.56\times10^5\ ,\ \mathrm{cond}(A) \doteqdot 2\times10^5\ .$$

ICASE＝8用：　非対称行列である．$\varepsilon 1=10^{-11}$，$\varepsilon 2=10^{-10}$，$\varepsilon 3=10^{-9}$，$\varepsilon 4=10^{-8}$のとき、$\|A\|_2 \doteqdot 32.0$，$\|A^{-1}\|_2 \doteqdot 0.35\times10^{14}$，$\mathrm{cond}(A) \doteqdot 1.1\times10^{15}$

右辺bの特徴

ICASE＝1用：　Aの最高次の固有ベクトルに近い．従って、右辺の摂動に対応する解の摂動が特に大きい．（丸め誤差に対しても強制的摂動に対しても）

ICASE＝3用：　上記ほどではないが，やはりAの高次の固有ベクトル成分を濃厚に含む．また解ベクトルxの$\underline{x_1}, x_5$　；　x_6, x_{10}　；　…　がゼロになっていることと、これらに対応するa_1；a_6；…　が順にランク落ちを起すよう仕組んである．そのため，ランク落ちを起した場合の$A_g^T A_g \bar{x}_g = A_g^T b$の特解を、正解や、DHOUSEによる準正解と比較し易い。

ICASE＝8用：　やはりAの高次の固有ベクトル成分を濃厚に含む。（また解ベクトルxのx_8, x_{18}成分がゼロになっていて、OHOUSEによるランク落ちの順a_8，a_{18}に適合させてある。）

6 GAUSS0 のテスト例

$EPS1,2,3,4 = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$

$\|A\|_2 = 3.62$, $\|A^{-1}\|_2 = 0.562 \times 10^6$, $\mathrm{Cond}A = 2.03 \times 10^6$

ICASE : 1 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.60000000000000000D+01	0.99999989358180152D+00
2	7	7	0.60000000000000000D+01	-0.10000001064164061D+01
3	12	12	0.60000000000000000D+01	0.99999989358717838D+00
4	17	17	0.60000000000000000D+01	-0.10000001064074446D+01
5	9	9	0.58333333333333333D+01	0.99999989359972465D+00
6	14	14	0.58333333333333333D+01	0.99999998321323516D+00
7	17	4	0.58333333333333333D+01	-0.10000000167766281D+01
8	19	19	0.58333333333333333D+01	0.99999998323468402D+00
9	12	3	0.14285714285714288D+01	-0.10000000167528282D+01
10	13	13	0.14285714285714288D+01	0.99999998326083413D+00
11	18	18	0.14285714285714288D+01	0.99999999809772833D+00
12	19	8	0.14285714285714288D+01	-0.10000000018871744D+01
13	20	20	0.14600000000000012D+00	0.99999999812818187D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00	-0.10000000018562034D+01
15	20	10	0.10040080798121710D+00	0.99999999815966736D+00
16	19	5	0.10004000800799605D+00	0.99999999977223128D+00
17	19	16	0.17903910006686519D-02	-0.10000000002116050D+01
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.99999999980459450D+00
19	20	6	0.19709905158712137D-06	-0.10000000001791727D+01
20	20	1	0.15998547585863385D-08	0.99999999983709036D+00

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)… DIAG(K)のこと.	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	0.10000000000048845D+01
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	-0.99999999999511535D+00
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.10000000000048848D+01
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	-0.99999999999511391D+00
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.10000000000048863D+01
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.10000000000007661D+01
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	-0.99999999999923464D+00
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10000000000007645D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	-0.99999999999923610D+00
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.10000000000007632D+01
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.10000000000001155D+01
12	12	3	0.11952286093343931D+01	-0.99999999999988551D+00
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10000000000001132D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	-0.99999999999988709D+00
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.10000000000001119D+01
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.10000000000000182D+01
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	-0.99999999999998232D+00
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000000000000158D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	-0.99999999999998510D+00
20	20	1	0.39998178684218635D-04	0.10000000000000133D+01

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

$\|Ax_{h_0}\|_2 = \|r_{h_0}\|$	HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.33820826609804603D-14
$\|r_g\|$	GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.48273131373782683D-11
$\|r_h\|$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.33820826609804603D-14
$x_h - x_g\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.24092479717969869D-06
$x_g - x\|_2 = \|\delta x_g\|$	GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.24091373761466364D-06
$x_h - x\|_2 = \|\delta x_h\|$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.11059755467616533D-10

▶ みどころ：(1) GAUSS による JP(K), JQ(K) と HOUSEHOLDER による JP(K), JQ(K) とは、PIV(K), DIAG(K) の内容を見ると，実質的に同じである。

ICASE : 1 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0 , ITER : 2 , EPS : 0.159985D-07

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)		SOLUTION
1	2	2	0.60000000000000000D+01	***	0.0
2	7	7	0.60000000000000000D+01		-0.19999822000211718D+01
3	12	12	0.60000000000000000D+01		0.53398336629916253D-04
4	17	17	0.60000000000000000D+01		-0.19998932065264488D+01
5	9	9	0.58333333333333333D+01		0.17798378973735293D-03
6	14	14	0.58333333333333333D+01		0.89001693976651335D+00
7	17	4	0.58333333333333333D+01		-0.11098922813004748D+01
8	19	19	0.58333333333333333D+01		0.89020029107009685D+00
9	12	3	0.14285714285714288D+01		-0.11097053447216254D+01
10	13	13	0.14285714285714288D+01		0.89039080972450334D+00
11	18	18	0.14285714285714288D+01		0.98833389385013797D+00
12	19	8	0.14285714285714288D+01		-0.10115679742826997D+01
13	20	20	0.14600000000000012D+00		0.98853034476764390D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00		-0.10113711505986862D+01
15	20	10	0.10040080798121710D+00		0.98872753801845405D+00
16	19	5	0.10004000800799605D+00		0.99861463809397222D+00
17	19	16	0.17903910006686519D-02		-0.10012864685072780D+01
18	18	11	0.18567245818392145D-04		0.99881244568960992D+00
19	20	6	0.19709905158712137D-06		-0.10010886209152203D+01
20	20	1	0.15998547585863385D-08		0.99901033007837398D+00

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)		SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	***	0.0
2	7	7	-0.24494897427831779D+01		-0.19999822000210783D+01
3	12	12	-0.24494897427831779D+01		0.53398336908615436D-04
4	17	17	-0.24494897427831779D+01		-0.19998932065258916D+01
5	9	9	-0.24152294576982396D+01		0.17798379066329841D-03
6	14	14	-0.24152294576982396D+01		0.89001694437676700D+00
7	19	19	-0.24152294576982396D+01		-0.11098922766906520D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01		0.89020029567859675D+00
9	13	13	0.11952286093343936D+01		-0.11097053401153403D+01
0	18	18	0.11952286093343936D+01		0.89039081432768225D+00
1	17	8	0.11952286093343931D+01		0.98833389445554590D+00
2	12	3	0.11952286093343931D+01		-0.10115679736815189D+01
3	20	20	-0.38209946349085580D+00		0.98853034536436880D+00
4	15	15	-0.32262493597840251D+00		-0.10113711500066442D+01
5	18	10	0.31686086533558674D+00		0.98872753860558653D+00
6	20	5	0.31629101790597239D+00		0.99861463816767747D+00
7	20	16	-0.42313012190907083D-01		-0.10012864684387408D+01
8	20	11	-0.43089727102294077D-02		0.99881244575294494D+00
9	20	6	0.44395838852121053D-03		-0.10010886208571168D+01
0	20	1	0.0		0.99901033013121826D+00

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 2)

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1)	:	0.33820826609804603D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA	:	0.39998178684335027D-04
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2)	:	0.39998178684341424D-04
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION	:	0.10389892279454609D-07
GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.22494957401671198D+01
HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.22494957390264294D+01

● $eps = 0.15985 \times 10^{-7}$ によって a_1 を落し、$x_1 = 0$ とおいた特解を求めた。x_g x_h 共に正解とくらべ、$\|x_g - x\|_2$, $\|x_h - x\|_2$ は 2.25 程度の大きな値を示しているが、$\|b - Ax_g\|_2$, $\|b - Ax_h\|_2$ は共に 0.4×10^{-4} の程度，しかも 10^{-16} のケタまで両者は一致している。($10^{-4} \times 10^{-12} = 10^{-16}$)

ICASE : 1 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0 , ITER : 3 , EPS : 0.159985D-05

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)		SOLUTION
1	2	2	0.60000000000000000D+01	***	0.0
2	7	7	0.60000000000000000D+01		-0.20000000353835372D+01
3	12	12	0.60000000000000000D+01		-0.88457074335208498D-07
4	17	17	0.60000000000000000D+01		-0.20000001415270736D+01
5	9	9	0.58333333333333333D+01		-0.17689999729235861D-06
6	14	14	0.58333333333333333D+01	***	0.0
7	17	4	0.58333333333333333D+01		-0.19998230292144046D+01
8	19	19	0.58333333333333333D+01		0.53075461113938409D-03
9	12	3	0.14285714285714288D+01		-0.19989388062513249D+01
10	13	13	0.14285714285714288D+01		0.17681304702452360D-02
11	18	18	0.14285714285714288D+01		0.88504470811910597D+00
12	19	8	0.14285714285714288D+01		-0.11140534034041771D+01
13	20	20	0.14600000000000012D+00		0.88686693924365029D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00		-0.11121944216653685D+01
15	20	10	0.10040080798121710D+00		0.88876235614080809D+00
16	19	5	0.10004000800799605D+00		0.98623823548230997D+00
17	19	16	0.17903910006686519D-02		-0.10127847975328530D+01
18	18	11	0.18567245818392145D-04		0.98819421991544748D+00
19	20	1	0.39840185803729136D-08		-0.10108248699007469D+01
20	20	6	0.19709905158712137D-06		0.99015777529060488D+00

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)		SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	***	0.0
2	7	7	-0.24494897427831779D+01		-0.20000000353835361D+01
3	12	12	-0.24494897427831779D+01		-0.88457072432602099D-07
4	17	17	-0.24494897427831779D+01		-0.20000001415270701D+01
5	9	9	-0.24152294576982396D+01		-0.17689999364990790D-06
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	***	0.0
7	19	19	-0.24152294576982396D+01		-0.19998230292143908D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01		0.53075461118034969D-03
9	13	13	0.11952286093343936D+01		-0.19989388062512436D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01		0.17681304703792654D-02
11	17	8	0.11952286093343931D+01		0.88504470818459270D+00
12	12	3	0.11952286093343931D+01		-0.11140534033387495D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00		0.88686693930889378D+00
14	15	15	-0.32262493597840251D+00		-0.11121944216004334D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00		0.88876235620531113D+00
16	20	5	0.31629101790597239D+00		0.98623823549125789D+00
17	20	16	-0.42313012190907083D-01		-0.10127847975244821D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02		0.98819421992321928D+00
19	19	1	0.0		-0.10108248698935929D+01
20	20	6	0.0		0.99015777529712329D+00

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 3)

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1)	:	0.33820826609804603D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA	:	0.397,149,791,825,57946D-03
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2)	:	0.397,149,791,825,56070D-03
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION	:	0.14665420581572808D-09
GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.31713752538370683D+01
HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.31713752538252200D+01

● 単精度による $A^TA \rightarrow$ GAUSS0 によるときは大体この例の $eps = 0.16 \times 10^{-5}$ によるランク落ち判定による特解を求めるあたりが限度となろう。上例では a_1, a_6 を落してのち解を求めている。

ICASE : 1 , IPUTUB : 1 , EPSY : 0.100000D-05 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.60000000000000000D+01	0.10123711565025064D+01
2	7	7	0.60000000000000000D+01	-0.98762884348269356D+00
3	12	12	0.60000000000000000D+01	0.10123711565469065D+01
4	17	17	0.60000000000000000D+01	-0.98762984340869336D+00
5	9	9	0.58333333333333333D+01	0.10123691566505053D+01
6	14	14	0.58333333333333333D+01	0.10023698966072567D+01
7	17	4	0.58333333333333333D+01	-0.99763110331517013D+00
8	19	19	0.58333333333333333D+01	0.10023678967659793D+01
9	12	3	0.14285714285714288D+01	-0.99763410314929621D+00
10	13	13	0.14285714285714288D+01	0.10023638969390005D+01
11	18	18	0.14285714285714288D+01	0.10003639888050428D+01
12	19	8	0.14285714285714288D+01	-0.99963801110248081D+00
13	20	20	0.14600000000000012D+00	0.10003599889906027D+01
14	15	15	0.10408684931506861D+00	-0.99964301091570940D+00
15	20	10	0.10040080798121710D+00	0.10003539891785778D+01
16	19	5	0.10004000800799605D+00	0.10000539986667234D+01
17	19	16	0.17903910006686519D-02	-0.99994900123830244D+00
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.10000479988567592D+01
19	20	6	0.19709905158712137D-06	-0.99995600104809675D+00
20	20	1	0.15998547585863385D-08	0.10000399990471227D+01

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	0.10123720000156691D+01
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	-0.98762799998433097D+00
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.10123720000156691D+01
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	-0.98762899998432960D+00
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.10123700000156697D+01
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.10023700000021225D+01
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	-0.99763099999787912D+00
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10023680000021189D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	-0.99763399999788270D+00
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.10023640000021152D+01
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.10003640000002454D+01
12	12	3	0.11952286093343931D+01	-0.99963799999975680D+00
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10003600000002411D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	-0.99964299999976053D+00
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.10003540000002376D+01
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.10000540000000353D+01
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	-0.99994899999996592D+00
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000480000000305D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	-0.99995599999997149D+00
20	20	1	0.39998178684218635D-04	0.10000400000000256D+01

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

	HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1)	:	0.45775667985222376D-14
	GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA	:	0.34070691831354278D-10
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2)	:	0.45775667985222376D-14
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION	:	0.19002553886421441D-05
$\|\delta x_g\|_2$	GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.28175007834719107D-01
$\|\delta x_h\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.28176903555741829D-01

• $\|\delta x_g\|_2$, $\|\delta x_h\|_2$ 共に殆んど同じ値 ≒ 0.2817×10^{-1} を示している。これは右辺の摂動 $\|\delta b\|_2/\|b\|_2$ に対する解の摂動 $\|\delta x\|_2/\|x\|_2$ の倍率 α :

$$\|\delta x\|_2/\|x\|_2 = \alpha \cdot \|\delta b\|_2/\|b\|_2$$

が A^TA − GAUSSO と DHOUSE とで殆んど等しいことを示している。

（ cond(A^TA) , cond(A) に'比例'するというのは迷信か？）

ICASE : 1 , IPUTUB : 3 , EPSY : 0.100000D-05 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.6000000000000000D+01	0.1000008020295504D+01
2	7	7	0.6000000000000000D+01	-0.9999919797048154D+00
3	12	12	0.6000000000000000D+01	0.1000007020294545D+01
4	17	17	0.6000000000000000D+01	-0.9999939797064122D+00
5	9	9	0.5833333333333333D+01	0.1000006020292310D+01
6	14	14	0.5833333333333333D+01	0.1000006004321587D+01
7	17	4	0.5833333333333333D+01	-0.9999939956804570D+00
8	19	19	0.5833333333333333D+01	0.1000005004317050D+01
9	12	3	0.1428571428571428D+01	-0.9999959956858899D+00
10	13	13	0.1428571428571428D+01	0.1000004004310721D+01
11	18	18	0.1428571428571428D+01	0.1000004000474598D+01
12	19	8	0.1428571428571428D+01	-0.9999959995292754D+00
13	20	20	0.1460000000000001D+00	0.1000003000466812D+01
14	15	15	0.1040868493150686D+00	-0.9999979995371384D+00
15	20	10	0.1004008079812171D+00	0.1000002000458873D+01
16	19	5	0.1000400080079960D+00	0.1000002000056250D+01
17	19	16	0.1790391000668651D-02	-0.9999979999477741D+00
18	18	11	0.1856724581839214D-04	0.1000001000048203D+01
19	20	6	0.1970990515871213D-06	-0.9999999999558174D+00
20	20	1	0.1599854758586338D-08	0.1000000000040164D+01

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.2449489742783177D+01	0.1000008000005592D+01
2	7	7	-0.2449489742783177D+01	-0.9999919999944081D+00
3	12	12	-0.2449489742783177D+01	0.1000007000005591D+01
4	17	17	-0.2449489742783177D+01	-0.9999939999944080D+00
5	9	9	-0.2415229457698239D+01	0.1000006000005592D+01
6	14	14	-0.2415229457698239D+01	0.1000006000001638D+01
7	19	19	-0.2415229457698239D+01	-0.9999939999983625D+00
8	17	4	0.2415229457698239D+01	0.1000005000001636D+01
9	13	13	0.1195228609334393D+01	-0.9999959999983651D+00
10	18	18	0.1195228609334393D+01	0.1000004000001633D+01
11	17	8	0.1195228609334393D+01	0.1000004000000227D+01
12	12	3	0.1195228609334393D+01	-0.9999959999997744D+00
13	20	20	-0.3820994634908558D+00	0.1000003000000223D+01
14	15	15	-0.3226249359784025D+00	-0.9999979999997774D+00
15	18	10	0.3168608653355867D+00	0.1000002000000220D+01
16	20	5	0.3162910179059723D+00	0.1000002000000034D+01
17	20	16	-0.4231301219090708D-01	-0.9999979999999666D+00
18	20	11	-0.4308972710229407D-02	0.1000001000000030D+01
19	20	6	0.4439583885212105D-03	-0.9999999999999715D+00
20	20	1	0.3999817868421863D-04	0.1000000000000025D+01

**** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

$\|r_{h_0}\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.3285960078913406D-14
$\|r_g\|_2$	GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.1232312649827312D-11
$\|r_h\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.3285960078913406D-14
$\|x_h - x_g\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.4639330224026807D-07
$\|\delta x_g\|_2$	GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.2092016258091296D-04
$\|\delta x_h\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.2088062451932401D-04

● IPUTUB＝3 の摂動は、0, +ε, 0, −ε, 0, の形ゆえ、対応する解の摂動が、IPUTUB＝1 のときとくらべ、はるかに小さい。epsy＝0.1×10^{-5}の摂動に対する$\|\delta x_g\|_2$, $\|\delta x_h\|_2$ 共に $0.209 * 10^{-4}$ の程度である．IPUTUB＝1 のときは $0.281 * 10^{-1}$ であった（13頁）残差のノルム $\|r_g\|_2$ は約 0.12×10^{-11}，ガウスでもよい線に入っている。

これより ICASE=3，(正解は 0,1,1,1,0,0 1,1,1,0, ···

ICASE : 3 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.60000000000000000D+01	-0.51199157699937871D-06
2	7	7	0.60000000000000000D+01	0.99999948801744845D+00
3	12	12	0.60000000000000000D+01	0.99999948803549951D+00
4	17	17	0.60000000000000000D+01	0.99999948806257596D+00
5	9	9	0.58333333333333333D+01	-0.51190132271644891D-06
6	14	14	0.58333333333333333D+01	-0.60649336958677479D-07
7	17	4	0.58333333333333333D+01	0.99999993939755275D+00
8	19	19	0.58333333333333333D+01	0.99999993944620635D+00
9	12	3	0.14285714285714288D+01	0.99999993949662283D+00
10	13	13	0.14285714285714288D+01	-0.60451199205153984D-07
11	18	18	0.14285714285714288D+01	-0.65136486914162584D-08
12	19	8	0.14285714285714288D+01	0.99999999354054536D+00
13	20	20	0.14600000000000012D+00	0.99999999359499481D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00	0.99999999364969799D+00
15	20	10	0.10040080798121710D+00	-0.62953470168700691D-08
16	19	5	0.10004000800799605D+00	-0.77490928731555237D-09
17	19	16	0.17903910006686519D-02	0.99999999928033330D+00
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.99999999933561218D+00
19	20	6	0.19709905158712137D-06	0.99999999939092518D+00
20	20	1	0.15998547585863385D-08	-0.55373029669610632D-09

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	0.19795483191187123D-10
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	0.10000000000197942D+01
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.10000000000197933D+01
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	0.10000000000197922D+01
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.19792189168736289D-10
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.31828052754216783D-11
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	0.10000000000031801D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10000000000031783D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	0.10000000000031768D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.31755810947552964D-11
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.34329848437470820D-12
12	12	3	0.11952286093343931D+01	0.10000000000003397D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10000000000003368D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	0.10000000000003340D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.33175120923185826D-12
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.40607468093442889D-13
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	0.10000000000000364D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000000000000331D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	0.10000000000000304D+01
20	20	1	0.39998178684218635D-04	0.29114374113802578D-13

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1)	:	0.45441226316795398D-14
GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA	:	0.20569875523775613D-10
HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2)	:	0.45441226316795398D-14
HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION	:	0.11528813766163590D-05
GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.11528365826264109D-05
HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.44833029070968522D-10

• この後，ランク落ちのあるときの特解と正解とを比較するとき、$x_1=0$，$x_6=0$,·· であるため比較し易いのである。

ICASE : 3 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0 , ITER : 2 , EPS : 0.159985D-07

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.60000000000000000D+01	*** 0.0
2	7	7	0.60000000000000000D+01	0.99999999999991214D+00
3	12	12	0.60000000000000000D+01	0.99999999999973715D+00
4	17	17	0.60000000000000000D+01	0.99999999999947572D+00
5	9	9	0.58333333333333333D+01	-0.87191877901581504D-12
6	14	14	0.58333333333333333D+01	-0.43389391087480980D-08
7	17	4	0.58333333333333333D+01	0.99999999566147257D+00
8	19	19	0.58333333333333333D+01	0.99999999566272994D+00
9	12	3	0.14285714285714288D+01	0.99999999566483268D+00
10	13	13	0.14285714285714288D+01	-0.43322196206087269D-08
11	18	18	0.14285714285714288D+01	-0.54070094462295590D-09
12	19	8	0.14285714285714288D+01	0.99999999946325042D+00
13	20	20	0.14600000000000012D+00	0.99999999946736129D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00	0.99999999947163098D+00
15	20	10	0.10040080798121710D+00	-0.52394175832501218D-09
16	19	5	0.10004000800799605D+00	-0.65615701467417409D-10
17	19	16	0.17903910006686519D-02	0.99999999993899436D+00
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.99999999994363006D+00
19	20	6	0.19709905158712137D-06	0.99999999994828993D+00
20	20	1	0.15998547585863385D-08	-0.47027662299923437D-10

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	*** 0.0
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	0.99999999999999936D+00
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.99999999999999907D+00
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	0.99999999999999889D+00
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.22925268549286958D-15
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.10056375465120370D-11
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	0.10000000000010050D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10000000000010050D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	0.10000000000010052D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.10058143021747097D-11
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.11236228816169062D-12
12	12	3	0.11952286093343931D+01	0.10000000000001106D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10000000000001095D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	0.10000000000001086D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.10860738917430772D-12
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.13183561227758928D-13
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	0.10000000000000111D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000000000000095D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	0.10000000000000089D+01
20	20	1	0.0	0.95233808613355103D-14

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 2)

	HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.45441226316795398D-14
	GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.19328880367282697D-11
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.42195321972799592D-14
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.97724643772636014D-08
$\|\delta x_g\|_2$	GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.97702031011719092D-08
$\|\delta x_h\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.22614850686469608D-11

• a_1を落し、x_1を0とおいた特解x_g, x_hを求めている。もともと正解xのx_1が0であったから，x_g, x_hの$x_2, x_3, \cdots$とx, x_{h0}の$x_2, x_3, \cdots$と、そう変化しないで済んでいる。$\|\delta x_g\|_2 \fallingdotseq 0.9770 \times 10^{-8}$, $\|\delta x_h\| \fallingdotseq 0.2261 * 10^{-11}$。

ICASE : 3 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0 , ITER : 3 , EPS : 0.159985D-05

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)		SOLUTION
1	2	2	0.60000000000000000D+01	***	0.0
2	7	7	0.60000000000000000D+01		0.99999999999999911D+00
3	12	12	0.60000000000000000D+01		0.99999999999999797D+00
4	17	17	0.60000000000000000D+01		0.99999999999999706D+00
5	9	9	0.58333333333333333D+01		-0.33640922544775360D-14
6	14	14	0.58333333333333333D+01	***	0.0
7	17	4	0.58333333333333333D+01		0.99999999999999152D+00
8	19	19	0.58333333333333333D+01		0.99999999999997544D+00
9	12	3	0.14285714285714288D+01		0.99999999999995230D+00
10	13	13	0.14285714285714288D+01		-0.77698738886739434D-13
11	18	18	0.14285714285714288D+01		-0.37153801355443851D-10
12	19	8	0.14285714285714288D+01		0.99999999996287914D+00
13	20	20	0.14600000000000012D+00		0.99999999996298250D+00
14	15	15	0.10408684931506861D+00		0.99999999996315640D+00
15	20	10	0.10040080798121710D+00		-0.36599531697480123D-10
16	19	5	0.10004000800799605D+00		-0.52792573864303617D-11
17	19	16	0.17903910006686519D-02		0.99999999999504999D+00
18	18	11	0.18567245818392145D-04		0.99999999999539503D+00
19	20	1	0.39840185803729136D-08		0.99999999999575524D+00
20	20	6	0.19709905158712137D-06		-0.38703981347451894D-11

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)		SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	***	0.0
2	7	7	-0.24494897427831779D+01		0.99999999999999944D+00
3	12	12	-0.24494897427831779D+01		0.99999999999999925D+00
4	17	17	-0.24494897427831779D+01		0.99999999999999899D+00
5	9	9	-0.24152294576982396D+01		0.27947439599373105D-16
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	***	0.0
7	19	19	-0.24152294576982396D+01		0.99999999999999981D+00
8	17	4	0.24152294576982392D+01		0.10000000000000000D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01		0.10000000000000007D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01		0.17521422177841161D-14
11	17	8	0.11952286093343931D+01		-0.43450223215744663D-14
12	12	3	0.11952286093343931D+01		0.99999999999999518D+00
13	20	20	-0.38209946349085580D+00		0.99999999999999516D+00
14	15	15	-0.32262493597840251D+00		0.99999999999999521D+00
15	18	10	0.31686086533558674D+00		-0.43441016942581878D-14
16	20	5	0.31629101790597239D+00		-0.80063907403986857D-15
17	20	16	-0.42313012190907083D-01		0.99999999999999818D+00
18	20	11	-0.43089727102294077D-02		0.99999999999999777D+00
19	19	1	0.0		0.99999999999999815D+00
20	20	6	0.0		-0.47919446036978628D-15

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 3)

	HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1)	:	0.45441226316795398D-14
	GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA	:	0.16104332527955496D-12
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2)	:	0.35886896686837450D-14
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION	:	0.83249295761152235D-10
$\|\delta x_g\|_2$	GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.83259960094590350D-10
$\|\delta x_h\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.11195750618022060D-13

• a_1, a_6 を落したが，正解xのx_1, x_6が0であったから特解x_g, x_hのx_1, x_6以外の要素x_iももとと比べ変化が非常にすくない。特にx_hにおいて然り。$\|\delta x_g\|_2 \doteqdot 0.8325\times10^{-10}$, $\|\delta x_h\|_2 \doteqdot 0.1195\times10^{-13}$.

ICASE : 3 , IPUTUB : 1 , EPSY : 0.100000D-05 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.60000000000000000D+01	0.12371220714942027D-01
2	7	7	0.60000000000000000D+01	0.10123712207286688D+01
3	12	12	0.60000000000000000D+01	0.10123712207561222D+01
4	17	17	0.60000000000000000D+01	0.10123702207973018D+01
5	9	9	0.58333333333333333D+01	0.12369220852206852D-01
6	14	14	0.58333333333333333D+01	0.23699071462183144D-02
7	17	4	0.58333333333333333D+01	0.10023689072176374D+01
8	19	19	0.58333333333333333D+01	0.10023679072918452D+01
9	12	3	0.14285714285714288D+01	0.10023659073688400D+01
10	13	13	0.14285714285714288D+01	0.23639074486202935D-02
11	18	18	0.14285714285714288D+01	0.36399001112808117D-03
12	19	8	0.14285714285714288D+01	0.10003619900941148D+01
13	20	20	0.14600000000000012D+00	0.10003599901775235D+01
14	15	15	0.10408684931506861D+00	0.10003569902613516D+01
15	20	10	0.10040080798121710D+00	0.35399034559639530D-03
16	19	5	0.10004000800799605D+00	0.53998811333015237D-04
17	19	16	0.17903910006686519D-02	0.10000509988960551D+01
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.10000479989808388D+01
19	20	6	0.19709905158712137D-06	0.10000439990656798D+01
20	20	1	0.15998547585863385D-08	0.39999150574221383D-04

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	0.12372000016719797D-01
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	0.10123720000167185D+01
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.10123720000167173D+01
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	0.10123710000167159D+01
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.12370000016716222D-01
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.23700000026220816D-02
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	0.10023690000026200D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10023680000026183D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	0.10023660000026167D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.23640000026156240D-02
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.36400000029454343D-03
12	12	3	0.11952286093343931D+01	0.10003620000002915D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10003600000002890D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	0.10003570000002864D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.35400000028488750D-03
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.54000000035018532D-04
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	0.10000510000000318D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000480000000289D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	0.10000440000000264D+01
20	20	1	0.39998178684218635D-04	0.40000000025111464D-04

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

	HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.42894527863324324D-14
	GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.31332317336273770D-10
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.42894527863324324D-14
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.17548760829626051D-05
$\|\delta x_g\|_2$	GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.28175153289685724D-01
$\|\delta x_h\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.28176903558255612D-01

• $0, 0, +\varepsilon, 0, 0$ タイプの $epsy = 0.1\times10^{-5}$ の摂動に対し，$\|\delta x_g\|_2$, $\|\delta x_h\|$ 共に約 0.2817×10^{-1} の解の摂動がひきおこされた。（ICASE =1 のときと同じ，13頁）

ICASE : 3 , IPUTUB : 3 , EPSY : 0.100000D-05 , ITER : 1 , EPS : 0.159985D-09

***** GAUSS *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.60000000000000000D+01	0.74246742647324727D-05
2	7	7	0.60000000000000000D+01	0.10000074246844195D+01
3	12	12	0.60000000000000000D+01	0.10000064247047296D+01
4	17	17	0.60000000000000000D+01	0.10000054247351939D+01
5	9	9	0.58333333333333333D+01	0.54247758124559890D-05
6	14	14	0.58333333333333333D+01	0.59324848802034448D-05
7	17	4	0.58333333333333333D+01	0.10000059325375066D+01
8	19	19	0.58333333333333333D+01	0.10000049325919880D+01
9	12	3	0.14285714285714288D+01	0.10000039326483230D+01
10	13	13	0.14285714285714288D+01	0.39327065105118281D-05
11	18	18	0.14285714285714288D+01	0.39927441732609581D-05
12	19	8	0.14285714285714288D+01	0.10000039928045055D+01
13	20	20	0.14600000000000012D+00	0.10000029928651315D+01
14	15	15	0.10408684931506861D+00	0.10000019929260493D+01
15	20	10	0.10040080798121710D+00	0.19929872567009917D-05
16	19	5	0.10004000800799605D+00	0.19991366494522077D-05
17	19	16	0.17903910006686519D-02	0.10000019991981888D+01
18	18	11	0.18567245818392145D-04	0.10000009992597714D+01
19	20	6	0.19709905158712137D-06	0.99999999932139440D+00
20	20	1	0.15998547585863385D-08	-0.61694499484237247D-09

***** HOUSEHOLDER *****

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24494897427831779D+01	0.80000180337382474D-05
2	7	7	-0.24494897427831779D+01	0.10000080000180329D+01
3	12	12	-0.24494897427831779D+01	0.10000070000180323D+01
4	17	17	-0.24494897427831779D+01	0.10000060000180311D+01
5	9	9	-0.24152294576982396D+01	0.60000180310065575D-05
6	14	14	-0.24152294576982396D+01	0.60000024458201445D-05
7	19	19	-0.24152294576982396D+01	0.10000060000024433D+01
8	17	4	0.24152294576982392D+01	0.10000050000024416D+01
9	13	13	0.11952286093343936D+01	0.10000040000024404D+01
10	18	18	0.11952286093343936D+01	0.40000024394928094D-05
11	17	8	0.11952286093343931D+01	0.40000002491478833D-05
12	12	3	0.11952286093343931D+01	0.10000040000002464D+01
13	20	20	-0.38209946349085580D+00	0.10000030000002442D+01
14	15	15	-0.32262493597840251D+00	0.10000020000002419D+01
15	18	10	0.31686086533558674D+00	0.20000002405700360D-05
16	20	5	0.31629101790597239D+00	0.20000000277924511D-05
17	20	16	-0.42313012190907083D-01	0.10000020000000247D+01
18	20	11	-0.43089727102294077D-02	0.10000010000000223D+01
19	20	6	0.44395838852121053D-03	0.10000000000000204D+01
20	20	1	0.39998178684218635D-04	0.19889971298792031D-13

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM ***** (ITER : 1)

	HOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA (1) :	0.40791018318416037D-14
	GAUSS-SOLUTION - ORIGINAL DATA :	0.23089827259236415D-10
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA (2) :	0.40791018318416037D-14
	HOUSEHOLDER-SOLUTION - GAUSS-SOLUTION :	0.12953167716628089D-05
$\|\delta x_g\|_2$	GAUSS-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.19844737259605330D-04
$\|\delta x_h\|_2$	HOUSEHOLDER-SOLUTION - TRUE-SOLUTION :	0.20880646350265844D-04

• IPUTUB = 1 (18頁) のものと比べ、摂動が $0, +\varepsilon, 0, -\varepsilon, 0$ タイプとなったため、$\|\delta x_g\|_2$, $\|\delta x_h\|_2$ 共に約3桁小さくなった。

ここで全体を通観して特筆したい点を二・三あげる:

1)ハウスホルダならばフルランクにて解x_{ho}を得,A^TAーガウスのときa_1を落しx_1をゼロとおいた特解x_gを求めた場合

x_{ho}のx_1がゼロでなければ$\|x_{ho}-x_g\|_2$は大きな値を示すが、$\|b-Ax_{ho}\|_2$と$\|b-A_gx_g\|_2$の差はそれほど大きくなく,x_gはそれなりに真理を主張している。実際a_1は他のものの一次結に近いからA^TAガウスによって**一次従属**と見なされてランク落ちとされたわけである。その場合他のもの達a_jがa_1の肩代りをしてx_jを調節して最初二乗解を形成するからである。

a_1を強制的に落して再びハウスホルダによって求めなおした解x_hとx_gを比較するとその点がはっきりする。

2)A^TAガウスによってもランク落ちなく解けた場合

$piv(m)>eps$ではあるが$piv(m)$がepsに近い場合には、x_gとx_hとは外見上大いに異なった値を示すことがある。このことは$a_{jQ(m)}$が'殆んど'他のa_jの一次結合なわけゆえ当然と言える。($a_{jQ(m)}$を外した$\bar{A}$に対する二つの特解に近いx_g,x_hが求まっていよう。)$\|b-Ax_g\|_2$,$\|b-Ax_h\|_2$の方は、結構よく合っている。最小二乗解にとってはそれでよい筈。

3)b自身に摂動が入るときの、それに対するx_gの摂動は、A_g自身の条件数$\sigma_{max}/\sigma_{min}$に依存し,計算機内部の丸め誤差に対する$x_g$の摂動が、$A_g^TA_g$の条件数の支配を受ける。

(例えば外部データ自身に$\|\delta b\|_2/\|b\|_2 \sim 10^{-5}$程度の誤差を含む場合,$\sigma_{max}/\sigma_{min} \lesssim 10^{+5}$の程度の、$A^TA$ガウスで解ける程度の問題の場合,解かれた$x_g$の信頼性に関しては、ハウスホルダによるものと変りない。)

6 ハウスホルダー法の変種

DHOUSEは、理論的には大変好ましいが、$n \times m$語が主メモリに入らぬような大きな問題を扱うときのページ交換の負担が大きい。（各k段で$a_j^{(k)}$, $j=k,\cdots,m$の長さを計算する計算負担は軽減する技法が知られているけれども。）

それに対し、筆者が日頃愛用していた素朴な上階段化ハウスホルダーの方は、それ自身DHOUSEよりもページ交換の負担がすくないし、'たてブロック化'による，一層のページ交換の負担軽減が直ちに可能である．素朴な上階段化ハウスホルダの方を今回はOHOUSE（Old House）と命名して、DHOUSEと比較した。（次頁にプログラムの大筋を示す．）先程GAUSSOを置いたところにOHOUSEを置いてDHOUSEと比較するわけである．結果は、ICASE＝8の行列によって、（実用上は問題にならない程度の）わずかの有意差？を得た。

DHOUSEにオプションをつけて、ページ交換の負担軽減をはかった場合も併せテストした。それは、DHOUSEの初めから7~10行目のところを次のように直したものである：

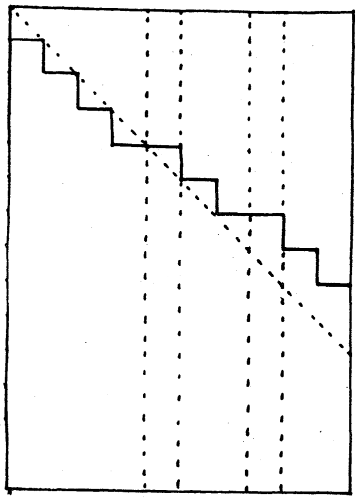
｛例えば $safe = \min(eps \times 10^6, \|A\|_2 \times 10^{-6})$ 程度に設定して｝

```
    do 30 j = k, m
       s = Σ_{i=k}^{n} a(i,j)**2
       if s > smax then
          smax = s ; jpk = j
       if smax ≧ safe**2  go to 900   {do 30の外へ!} {*}
30  continue
900 continue
```

{*}がオプション，{*}ありをSAFE ARI，なしをSAFE NASHIと呼ぶ。

OHOUSE

```
ir = 0
do kk=1,m
    ip(kk)=0
do kk=1,m
    k = kk-ir
    s = Σ_{i=k}^{n} a(i,kk)**2
    sigma = sqrt(s)
    if sigma > eps then
        h = sigma*(sigma+abs(a(k,kk))
        alfa = 1.0/h
        if a(k,kk) < 0.0  sigma=-sigma
        a(k,kk) = a(k,kk) + sigma
        do j = kk+1,m
            s = Σ_{i=k}^{n} a(i,kk)*a(i,j)
            as = alfa*s
            do i = k,n
                a(i,j) = a(i,j) - as*a(i,kk)
        s = Σ_{i=k}^{n} a(i,kk)*b(i)
        as = alfa*s
        do i = k,n
            b(i) = b(i) - as*a(i,kk)
    else
        ir = ir+1
        ip(kk)=1   ; a(k,kk) =-sigma
do kk = m,1,-1
    if ip(kk)=1 then
        x(kk) = 0.0  ; ir = ir-1
    else
        s = 0.0
        do j=kk+1,m
            s = s + a(kk-ir,j)*x(j)
        x(kk) = (b(kk-ir)-s)/a(kk-ir,kk)
```



ip[kk]

0	0	0	0	1	0	0	1	0	0

次頁のデータは $\mathrm{Cond}(A) \fallingdotseq 0.1\times10^{16}$ の、即ち常識的には限界を超えた問題である．それにしては残残 $\|b-Ax_h\|_2$ でみるとき何れも約 0.2×10^{-13} のよい線を出している．いっぽう $\|x_h-x_{true}\|_2$ の方は 0.18×10^{0} と 0.60×10^{-1} を示している．DHOUSEがこれによりや、勝ると言えるかどうか問題である．

EPS1 :	0.99999999999999998D-12	ANORM :	0.31925131407056544D+02
EPS2 :	0.10000000000000000D-10	AINRM :	0.34873164517570012D+14
EPS3 :	0.10000000000000000D-09	COND2 :	0.11133303598033242D+16

ICASE : 8 , IPUTUB : 0 , EPSY : 0.0 , ITER : 1 , EPS : 0.367624D-13

***** OLD-HOUSEHOLDER *****

	A(K,KK)	SOLUTION
1	-0.14142135623730951D+01	-0.91495301424396140D-03
2	-0.24525496936861444D+02	0.98663492298408759D+00
3	-0.18334746412707418D+02	-0.13365077015899451D-01
4	-0.24424033595578996D+01	-0.10133650770158871D+01
5	-0.70587389985090243D+00	-0.13365077015875349D-01
6	-0.44869935904710805D+00	-0.12450124001675152D-02
7	-0.90909090909117571D-01	0.11324057577589628D+01
8	-0.67184857632933485D-13	0.13240575775885076D+00
9	-0.10542204251233214D+01	-0.10012450124001329D+01
10	-0.10489050812574234D-10	-0.12450124001209267D-02
11	-0.10445457838625212D+01	-0.54927510755587883D-05
12	-0.10409003186316870D+01	0.99988623067767561D+00
13	-0.24516872607873626D+02	-0.11376932231370011D-03
14	-0.22516361115292884D+01	-0.10001137693223028D+01
15	-0.47668472641840517D+00	-0.11376932229292307D-03
16	-0.13540064008477455D+01	-0.10827657126011367D-04
17	-0.60302268921103261D+00	0.99998917234288449D+00
18	-0.56281327776348828D-11	0.11268655660317196D-02
19	-0.10260042558266944D+01	-0.10000108276570949D+01
20	-0.24608604043407922D-09	-0.10827657084490912D-04

***** D-HOUSEHOLDER *****   +++++ SAFE NASHI ++++

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	2	2	0.24617067250182341D+02	-0.35370659643271985D-03
2	13	13	-0.24617067250182341D+02	0.10043123213994880D+01
3	3	3	-0.18348478592697177D+02	0.43123213994831731D-02
4	16	16	-0.14189430361913733D+02	-0.99568767860052258D+00
5	6	6	0.13959630622932399D+02	0.43123213994729574D-02
6	14	14	-0.24440766768282953D+01	0.46660279959264106D-03
7	16	4	0.24423955924167347D+01	0.95734338880470450D+00
8	19	19	-0.18273843973831527D+01	-0.42656611195247426D-01
9	17	17	0.15899133131788945D+01	-0.99953339720042136D+00
10	17	9	0.15841192138911309D+01	0.46660279957362589D-03
11	12	12	-0.11339417464456680D+01	-0.49560957985244609D-05
12	14	5	-0.70429935941460645D+00	0.10000462869737596D+01
13	15	15	0.56025424210319585D+00	0.46286973756079280D-04
14	17	10	-0.31716484819041774D+00	-0.99995371302624760D+00
15	20	20	0.31413031069474177D+00	0.46286973748144492D-04
16	19	8	-0.90834052439168089D-01	0.51243069560716578D-05
17	17	11	0.49604492795175328D-10	0.10000051243069517D+01
18	18	18	-0.45390681733274510D-11	-0.45774543061334497D-03
19	20	1	-0.48800420206357430D-12	-0.99999487569305689D+00
20	20	7	-0.40847083079464047D-13	0.51243069379646959D-05

**** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM *****   (ITER : 1)

DHOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA 1	:	0.17273442266649573D-13
OHOUSEHOLDER SOLUTION - ORIGINAL DATA	:	0.25356533690258136D-13
DHOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA 2	:	0.17273442266649573D-13
OHH-SOLUTION - DHH-SOLUTION	:	0.25011066763772644D+00
OHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.18916627584110519D+00
DHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.60947140326883691D-01

- 次頁には OHOUSE と SAFE ARI の DHOUE を比べたものを示す.

***** D-HOUSEHOLDER *****   +++++ SAFE ARI ++++

	JP(K)	JQ(K)	PIV(K)	SOLUTION
1	1	1	-0.14142135623730951D+01	-0.11691792514421411D-03
2	2	2	-0.24525496936861444D+02	0.98714037718797024D+00
3	3	3	-0.18334746412707418D+02	-0.12859622812017003D-01
4	4	4	-0.24424033595578996D+01	-0.10128596228120050D+01
5	5	5	-0.70587389985090243D+00	-0.12859622811993678D-01
6	6	6	-0.44869935904710805D+00	-0.12742704886892328D-02
7	7	7	-0.90909090909117571D-01	0.11273219576316138D+01
8	9	9	-0.11180339887504145D+01	0.12732195763150374D+00
9	11	11	0.14142135623801659D+01	-0.10012742704886557D+01
10	12	12	0.12247448713977125D+01	-0.12742704886437618D-02
11	13	13	-0.24522098876999632D+02	-0.75039145978239269D-05
12	14	14	0.23074400055394757D+01	0.99986954566111684D+00
13	15	15	0.55887147395426653D+00	-0.13045433887149155D-03
14	16	16	0.13540064008477455D+01	-0.10001304543388596D+01
15	17	17	0.60302268921103251D+00	-0.13045433884805923D-03
16	19	19	-0.11180339888018829D+01	-0.12295042429692097D-04
17	20	20	-0.49108425620482010D-09	0.99998770495758238D+00
18	19	10	0.65785931381441523D-11	0.12922483463088843D-02
19	19	18	-0.33333761856333124D-11	-0.10000122950423944D+01
20	20	8	-0.40968638299218349D-13	-0.12295042382492222D-04

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM *****   (ITER : 1)

DHOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA 1	:	0.22305430354251406D-13
OHOUSEHOLDER SOLUTION - ORIGINAL DATA	:	0.25356533690258136D-13
DHOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA 2	:	0.22305430354251406D-13
OHH-SOLUTION - DHH-SOLUTION	:	0.73061541915006014D-02
OHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.18916627584110519D+00
DHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.18190619833166051D+00

• この例ではSAFEありのDHOUSEはOHOUSEと比べ有意差はないと言える．しかし有意差らしいものがあることもある．次のデータは、a_8を落して計算させたときのものである：

*** RESIDUAL & DIFFERENCE NORM *****   (ITER : 2)

DHOUSEHOLDER-SOLUTION : ORIGINAL DATA 1	:	0.22305430354251406D-13
OHOUSEHOLDER SOLUTION - ORIGINAL DATA	:	0.21741294238059423D-13
DHOUSEHOLDER-SOLUTION - ORIGINAL DATA 2	:	0.24512043184183116D-13
OHH-SOLUTION - DHH-SOLUTION	:	0.13926807317366374D-02
OHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.13347295690909738D-02
DHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.71001420302615038D-04

a_8を落したあとの$\tilde{A}$でも、まだ'殆んど一次従属'だから、$\|x_h - x_{true}\|_2$において上の〜〜部程度の差があらわれることを'有意差'と見るかどうか、問題である．$\|b - \tilde{A}x_h\|_2$の方はよい一致を示している．因みにSAFEなしのときには以下のようになった：

DHH-SOLUTION - TRUE-SOLUTION	:	0.40142198847359226D-03

以上，まだデータがすくなく、検討も浅いが、大方の予想としては次のように言ってよいと思われる：

1）オーソドックスなDHOUSEでなくても、これにオプションをつけた、SAFEありのDHOUSEで十分である．

2）OHOUSEでも実用上差しつかえ無さそうである．

OHOUSEは特に、‘たてブロック化’による、ページスワップの負担軽減のためのプログラム作成が容易だから、早速試みることができる．SAFEありのDHOUSEもちょっと手がかゝるが実用上十分の効果のあるプログラムを作成可能である．SAFEなしのDHOUSEとなると、‘よこ方向番地づけ’を行なった上で全面的にプログラムの書き換えを行なわねばならない。しかしそうすると、通常，断然たての方が長いデータを扱かう関係上，スーパーコンピュータにとってはCPUタイムの点では損をする．

7　おわりに：　正規方程式　$A^T(Ax-b)=0$　を異なる算法によって解いたときの二つの解を合理的に比較する方法を提示し、実施例を示した。

初めに、列選択つきハウスホルダDHOUSEによる解x_hと、対角軸選択の対称ガウスGAUSSOによる解x_gを比較した例

を示した。要約を20頁にしておいたが、さらに要約すると、

「$A=(a_1,\cdots,a_m)$の中に一次従属に近いa_lがあって、それがA^TAを作ったためにGAUSSOによってランク落ちと判定され、Aから外されて計算がされるとき，$x_l=0$とおいた特解x_gは最小二乗の意味では実用上採用可能な解になる．特に外部データb自身に10^{-5}程度の相対誤差は現実にはあると考えると、ますますその感を深くする．」

次にDHOUSEより簡単な、上階段化ハウスホルダーOHOUSEとDHOUSEを比べた。要約は25頁に書いた通りである。

OHOUSEは、ページ交換の負担を軽くするようプログラムするのが容易だから，‘大きな問題’を常時扱かう人には、それを奨めたい。

この研究のためのプログラム作成，データ取得は、すべて本学卒論学生：新美昌代によって実行された。じつは筆者自身、卒論指導教官になった縁で、始めてこの方面に参入したのであって、この報告も、専門家の目からみれば、未熟のこともあろう。

文献：

1) C.L. Lawson and R.J. Hanson (1974). *Solving Least Squares Problems*, *Prentce-Hall*

2) 中川徹・小柳義夫 (1982). 最小二乗法による実験データ解析 東京大学出版会